MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 7
4.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 2x \cdot \tan y\,, \qquad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

2. Bestimmen Sie vier verschiedene Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = -2\sqrt{y}, \qquad y \geq 0, \qquad y(1) = 0.$$

3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2(y-x)^2 + 1, \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

   a) Begründen Sie, daß genau eine (maximale) Lösung φ des obigen Anfangswertproblems existiert.

   b) Zeigen Sie (nur anhand der Differentialgleichung), daß die Lösung φ streng monoton wachsend ist.

   c) Bestimmen Sie die Lösung φ unter Verwendung der Substitution $z = y - x$.

4. *(∼Frühjahr 2017, Thema 1, Aufgabe 5)*

   a) Zeigen Sie, daß die Funktionen $\varphi_1(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$, und $\varphi_2(x) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$, Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y(x) + y(x) = 0$$

   sind, und geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.

   b) Zeigen Sie, daß die Funktion $\varphi_p :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_p(x) = \frac{e^x}{x}$, eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y(x) + y(x) = \frac{2e^x}{x^3} \qquad (*)$$

   ist.

   c) Bestimmen Sie die Lösung $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ von $(*)$ mit $\varphi(1) = 0,\ \varphi'(1) = 0$.

Abgabe bis 11.12.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).